

PERUMUMAN LEMMA SNAKE DAN LEMMA LIMA

Sripatmi¹, Yunita Septriana Anwar²¹Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mataram²Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Mataram

Email: spatmi@gmail.com, na2_math@yahoo.com

Abstrak. Barisan U -eksak merupakan perumuman dari barisan eksak yang diperkenalkan oleh Davvaz dan Parnian-Garamaleky. Dalam tulisan ini akan dikaji perumuman dari Lemma Snake dan Lemma Lima yang memanfaatkan sifat-sifat dari barisan U -eksak.

Kata Kunci : Barisan U -eksak, Lemma Snake, Lemma Lima

Abstract. U -exact sequences was introduced by Davvaz dan Parnian-Garamaleky as a generalization of exact sequences. In this paper, we give some characterizations and properties of U -exact sequences. We use these result to find a generalization of Snake Lemma and Five Lemma.

Key words Kunci : U -exact sequences, Snake Lemma, Five Lemma

PENDAHULUAN

Diasumsikan R adalah ring asosiatif dengan elemen identitas dan semua R -modul adalah R -modul unital. Barisan $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ disebut barisan eksak pendek jika $\text{Im } f = \ker(g)$. Barisan $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{pq} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_q \rightarrow 0$ merupakan salah satu contoh barisan eksak pendek. Secara umum barisan R -modul dan R -homomorfisma $\cdots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \cdots$ disebut eksak di M_i jika $\text{Im } (f_i) = \ker(f_{i+1})$ atau $\text{Im } (f_i) = f_{i+1}^{-1}(\{0\})$. Apabila sebarang submodul U_{i-1} dari M_{i-1} disubstitusikan pada submodul $\{0\}$, Davvaz dan Parnian-Garamaleky pada tahun 1999 memperkenalkan konsep dari barisan U -eksak yang memperumum definisi barisan eksak. Konsep barisan U -eksak banyak digunakan secara luas dalam Teori Ring dan Modul, Teori Grup, Teori Homologi, Aljabar Topologi, dan Teori Kompleks.

Barisan R -modul dan R -homomorfisma $\cdots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \cdots$ disebut U_{i+1} -eksak di M_i jika $\text{Im } (f_i) = f_{i+1}^{-1}(U_{i+1})$. Dari definisi ini diperoleh bahwa barisan eksak pendek $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ merupakan barisan $\{0\}$ -eksak di A , U -eksak di B , dan $\{0\}$ -eksak di C , atau sederhananya disebut U -eksak. Akibat lain yang diperoleh dari definisi barisan U -eksak adalah barisan $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ adalah U -eksak jika dan hanya jika f injektif, g surjektif, dan $\text{Im}(f) = g^{-1}(U)$. Misalnya barisan $0 \rightarrow 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow 0$ merupakan barisan \mathbb{Z}_4 -eksak.

Jika M adalah R -modul dan U adalah submodul dari M , maka barisan $0 \rightarrow U \xrightarrow{i} M \rightarrow M/U \rightarrow 0$ adalah barisan U -eksak. Selanjutnya, jika

U dan V adalah submodul-submodul dari M sedemikian hingga $V \subseteq U \subseteq M$, maka barisan $0 \rightarrow U \xrightarrow{\pi} M/V \rightarrow 0$ adalah barisan U/V -eksak dimana π adalah homomorfisma natural. Barisan U -eksak $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ disebut eksak jika dan hanya jika $U = \{0\}$ sehingga barisan U -eksak merupakan perumuman dari barisan eksak. Dalam tulisan ini diawali dengan definisi dan karakterisasi dari barisan U -eksak. Selanjutnya dikaji perumuman Lemma Snake dan Lemma Lima yang memanfaatkan karakterisasi dari barisan U -eksak. Karakterisasi dari barisan U -eksak diambil dari [2], pembuktian Lemma Snake dan Lemma Lima dapat dilihat di [1] dan [5], sedangkan perumuman Lemma Snake dan Lemma Lima merujuk pada [3] dan [4].

PEMBAHASAN

Definisi 1. Barisan dari R -modul dan R -homomorfisma

$\cdots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \cdots$ disebut barisan U_{i+1} -eksak di M_i jika $\text{Im } (f_i) = f_{i+1}^{-1}(U_{i+1})$, dimana U_{i+1} adalah submodul dari M_{i+1} .

Definisi 2. Barisan U -eksak $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ isomorfis dengan barisan U' -eksak $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \rightarrow 0$ jika terdapat diagram komutatif dari R -homomorfisma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

sedemikian hingga α , β , dan γ adalah isomorfisma.

Teorema 3. Isomorfisma dari barisan U -eksak merupakan relasi ekuivalen.

Bukti. Harus ditunjukkan isomorfisma dari barisan U -eksak dan U' -eksak merupakan relasi refleksif, simetris, dan transitif. Dengan mengambil α , β , dan γ berupa pemetaan identitas, jelas α , β , dan γ merupakan isomorfisma. Sehingga diperoleh isomorfisma dari barisan U -eksak memenuhi sifat refleksif. Selanjutnya, misalkan barisan U -eksak $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ isomorfis dengan barisan U' -eksak $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \rightarrow 0$, maka terdapat diagram komutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

sedemikian hingga α , β , dan γ adalah isomorfisma. Karena α , β , dan γ adalah isomorfisma, maka terdapat α^{-1} , β^{-1} , dan γ^{-1} yang juga adalah isomorfisma. Sehingga barisan U' -eksak $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \rightarrow 0$ isomorfis dengan barisan U -eksak $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ atau isomorfisma dari barisan U -eksak memenuhi sifat simetris. Tinggal ditunjukkan isomorfisma dari barisan U -eksak memenuhi sifat transitif. Misalkan misalkan barisan U -eksak $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ isomorfis dengan barisan U' -eksak $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \rightarrow 0$ dan barisan U' -eksak $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \rightarrow 0$ isomorfis dengan barisan U'' -eksak $0 \rightarrow A'' \xrightarrow{f''} B'' \xrightarrow{g''} C'' \rightarrow 0$ sehingga terdapat diagram komutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \longrightarrow 0 \\ & & \alpha' \downarrow & & \beta' \downarrow & & \gamma' \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A'' & \xrightarrow{f''} & B'' & \xrightarrow{g''} & C'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

sedemikian hingga α , β , γ , α' , β' , dan γ' adalah isomorfisma. Dengan memilih $\alpha \circ \alpha'$, $\beta \circ \beta'$, dan $\gamma \circ \gamma'$ yang juga merupakan isomorfisma, diperoleh barisan U -eksak $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ isomorfis dengan barisan U'' -eksak $0 \rightarrow A'' \xrightarrow{f''} B'' \xrightarrow{g''} C'' \rightarrow 0$. Sehingga isomorfisma dari barisan U -eksak memenuhi sifat transitif.

Teorema 4. Jika barisan U -eksak dan U' -eksak isomorfis, maka $U \cong U'$.

Bukti. Diberikan barisan U -eksak dan U' -eksak isomorfis, maka terdapat diagram komutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

sedemikian hingga α , β , dan γ adalah isomorfisma. Untuk menunjukkan $U \cong U'$, cukup ditunjukkan $\gamma(U) = U'$. Ambil sebarang $x \in \gamma(U)$, sehingga terdapat $u \in U$ sehingga $x = \gamma(u)$. Karena $u \in U$ dan baris pertama merupakan barisan U -eksak, maka $g^{-1}(u) \subseteq g^{-1}(U) = \text{Im } f$ sehingga $gg^{-1}(u) \subseteq gf(A)$. Akibatnya, $u \in gf(A)$, yaitu terdapat $a_0 \in A$ sedemikian hingga $u = gf(a_0)$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} x &= \gamma(u) = \gamma(gf(a_0)) = (\gamma g)f(a_0) = \\ &= (g'\beta)f(a_0) = g'(\beta f)(a_0) \\ &= g'(f'\alpha)(a_0) = (g'f')(\alpha(a_0)) \end{aligned}$$

Akibatnya, $x \in g'f'(A) \subseteq U'$ atau $\gamma(U) \subseteq U'$. Selanjutnya, ambil $y \in U'$. Karena g' epimorfisma, maka terdapat $b \in B'$ sehingga $g'(b) = y$ atau $b = g'^{-1}(y)$. Mengingat baris kedua merupakan barisan U' -eksak, yaitu $\text{Im } f' = g'^{-1}(U')$, maka terdapat $a \in A$ sehingga $b = f'(a)$. Karena γ dan β adalah isomorfisma, maka $y = g'(b) = g'f'(a) = g'\gamma^{-1}g'(f'(a))$. Sehingga $y = \gamma(g\beta^{-1}(b)) = (\gamma g)(\beta^{-1}(b)) = g'\beta(\beta^{-1}(b)) = g'(b)$.

Lemma 5 (Lemma Lima). Diberikan diagram komutatif dari R -modul homomorfisma berikut dimana setiap baris merupakan barisan eksak:

$$\begin{array}{ccccccc} A_5 & \xrightarrow{f_5} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_2 \xrightarrow{f_2} A_1 \\ \alpha_5 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow \alpha_1 \\ B_5 & \xrightarrow{g_5} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_2 \xrightarrow{g_2} B_1 \end{array}$$

- (i) Jika α_2, α_4 adalah monomorfisma dan α_5 epimorfisma, maka α_3 adalah monomorfisma.
- (ii) Jika α_2, α_4 adalah epimorfisma dan α_1 adalah monomorfisma, maka α_3 adalah epimorfisma.
- (iii) Jika α_5 adalah epimorfisma, α_1 monomorfisma, α_2, α_4 adalah isomorfisma, maka α_3 juga isomorfisma.

Lemma 6 (Perumuman Lemma Lima). Diberikan diagram komutatif dari R -modul homomorfisma berikut dengan baris pertama adalah U -eksak di A_2 , V -eksak di A_3 dan $\{0\}$ -eksak di A_4 , dan baris kedua adalah $\{0\}$ -eksak di B_2 , U' -eksak di B_3 dan V' -eksak di B_4 :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_5 & \xrightarrow{f_5} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_1 \\
 \alpha_5 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_1 \downarrow \\
 B_5 & \xrightarrow{g_5} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_1
 \end{array}$$

- (iv) Jika α_2, α_4 adalah monomorfisma dan α_5 epimorfisma, maka α_3 adalah monomorfisma.
- (v) Jika α_2, α_4 adalah epimorfisma dan α_1 adalah monomorfisma, maka α_3 adalah epimorfisma.
- (vi) Jika $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ adalah isomorfisma, maka α_3 juga isomorfisma.

Bukti.

- (i) Akan ditunjukkan α_3 adalah monomorfisma. Ambil $x \in \text{Ker } \alpha_3$. Berarti $\alpha_3(x) = 0$. Karena $0 = g_3\alpha_3(x) = \alpha_2f_3(x)$, maka $f_3(x) \in \text{Ker } \alpha_2 = 0$. Akibatnya, $x \in \text{Ker } f_3 \subseteq f_3^{-1}(U) = \text{Im } f_4$. Sehingga, terdapat $y \in A_4$ sedemikian hingga $f_4(y) = x$. Perhatikan bahwa : $0 = \alpha_3(x) = \alpha_3f_4(y) = g_4\alpha_4(y)$. Akibatnya, $\alpha_4(y) \in \text{Ker } g_4 \subseteq g_4^{-1}(U') = \text{Im } g_5$. Berarti terdapat $z \in B_5$ sehingga $g_5(z) = \alpha_4(y)$. Mengingat α_5 epimorfisma, maka terdapat $w \in A_5$ sehingga $\alpha_5(w) = z$. Selanjutnya, $\alpha_4(y) = g_5(z) = g_5\alpha_5(w) = \alpha_4f_5(w)$ atau $\alpha_4(y - f_5(w)) = 0$. Karena α_4 monomorfisma, maka $y - f_5(w) = 0$ atau $y = f_5(w)$. Dengan memanfaatkan $\{0\}$ -eksak pada A_4 diperoleh $x = f_4(y) = f_4f_5(w) = 0$. Dengan demikian α_3 adalah monomorfisma.

- (ii) Akan ditunjukkan α_3 adalah epimorfisma. Ambil sebarang $x \in B_3$, maka dimiliki $g_3(x) \in B_2$. Karena α_2 epimorfisma, maka terdapat $y \in A_2$ sehingga $\alpha_2(y) = g_3(x)$. Mengingat baris kedua $\{0\}$ -eksak di B_2 , diperoleh $0 = g_2g_3(x) = g_2\alpha_2(y) = \alpha_1f_2(y)$. Sehingga, $f_2(y) \in \text{Ker } \alpha_1 = 0$. Akibatnya, $y \in \text{Ker } f_2 \subseteq f_2^{-1}(U) = \text{Im } f_3$, yaitu terdapat $z \in A_3$ sedemikian hingga $f_3(z) = y$. Selanjutnya, $\alpha_2(y) = \alpha_2f_3(z) = g_3\alpha_3(z) = g_3(x)$ karena $\alpha_2(y) = g_3(x)$. Sehingga, $g_3(\alpha_3(z) - x) = 0$ atau $\alpha_3(z) - x \in \text{Ker } g_3 \subseteq g_3^{-1}(U') = \text{Im } g_4$, yaitu terdapat $a \in B_4$ sedemikian hingga $\alpha_3(z) - x = g_4(a)$. Dilain pihak, α_4 adalah epimorfisma, yaitu terdapat $b \in A_4$ sehingga $\alpha_4(b) = a$. Selanjutnya, $g_4(a) = g_4\alpha_4(b) = \alpha_3f_4(b) = \alpha_3(z) - x$ karena $\alpha_3(z) - x = g_4(a)$. Akibatnya, $\alpha_3(f_4(b) - z) = x$, yaitu α_3 adalah epimorfisma.

Dengan memanfaatkan (i) dan (ii) diperoleh langsung α_3 juga isomorfisma.

Lemma 8 (Perumuman Lemma Snake). Misalkan

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & f' & & g' & & \\
 & & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \\
 & \alpha \downarrow & & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C
 \end{array}$$

adalah diagram komutatif sedemikian hingga

- (1) Baris pertama adalah U' -eksak dan baris kedua adalah U -eksak.
- (2) $W \subseteq \text{Im } \alpha$
- (3) $U \subseteq \text{Im } \gamma$
- (4) $g(V) \subseteq U, f(W) = V$
- (5) $U' \subseteq \gamma^{-1}(U)$

Maka terdapat homomorfisma $\omega : \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'} \rightarrow$

Coker α sedemikian hingga barisan :

$$\begin{aligned}
 \alpha^{-1}(W) &\xrightarrow{f'_*} \beta^{-1}(V) \xrightarrow{g'_*} \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'} \xrightarrow{\omega} \text{Coker } \alpha \\
 &\xrightarrow{f'_*} \text{Coker } \beta \xrightarrow{g'_*} \text{Coker } \gamma
 \end{aligned}$$

eksak.

Bukti. Ambil $x \in g'(\beta^{-1}(V))$, maka terdapat $y \in V$ sedemikian hingga $g'(\beta^{-1}(y)) = x$. Karena $y \in V$ maka $g(y) \in C$, dan $g(V) \subseteq U$ mengakibatkan $g(y) \in U$. Sehingga $\gamma^{-1}(g(y)) \in \gamma^{-1}(U)$. Akibatnya $g'(\beta^{-1}(y)) = \gamma^{-1}(g(y)) \in \gamma^{-1}(U)$. Sehingga $g'(\beta^{-1}(V)) \subseteq \gamma^{-1}(U)$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan $f'(\alpha^{-1}(W)) \subseteq \beta^{-1}(V)$. Akibatnya terbentuk barisan:

$$\alpha^{-1}(W) \xrightarrow{f'|_{\alpha^{-1}(W)}} \beta^{-1}(V) \xrightarrow{g'|_{\beta^{-1}(V)}} \gamma^{-1}(U)$$

Dibentuk homomorfisma kanonik $\pi : \gamma^{-1}(U) \rightarrow \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'}$. Misalkan $f_*' = f'|_{\alpha^{-1}(W)}$ dan $g_*' = \pi g'|_{\beta^{-1}(V)}$ sehingga diperoleh barisan:

$$(I) \quad \alpha^{-1}(W)$$

$$\xrightarrow{f_*'} \beta^{-1}(V) \xrightarrow{g_*'} \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'}$$

Dilain pihak, dari f dan g dapat dibentuk homomorfisma $f^* : \frac{A}{Im \alpha} \rightarrow \frac{B}{Im \beta}$ dengan $f^*(a + Im \alpha) = f(a) + Im \beta$, dan $g^* : \frac{B}{Im \beta} \rightarrow \frac{C}{Im \gamma}$ dengan $g^*(b + Im \beta) = g(b) + Im \gamma$. Sehingga diperoleh barisan:

(II)

$$Coker \alpha \xrightarrow{f^*} Coker \beta \xrightarrow{g^*} Coker \gamma$$

Selanjutnya akan ditunjukkan terdapatnya homomorfisma $\omega : \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'} \rightarrow Coker \alpha$ yang menghubungkan barisan (I) dan (II). Misalkan $z + U' \in \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'}$. Pilih $b' \in B'$ sehingga $g'(b') = z$. Karena $g\beta(b') = \gamma g'(b') = \gamma(z) \in U$, maka $\beta(b') \in g^{-1}(U)$. Mengingat barisan (II) eksak, maka $\beta(b') \in Im f$. Akibatnya terdapat dengan tunggal $a \in A$ sedemikian hingga $\beta(b') = f(a)$ dan $a = f^{-1}\beta(b')$. Didefinisikan $\omega(z + U') = a + Im \alpha$. Misalkan $b'' \in B'$ dengan $g'(b'') = z$, maka terdapat $a' \in A$ sedemikian hingga $\beta(b'') = f(a')$. Dari $g'(b') = z$ dan $g'(b'') = z$, diperoleh $g'(b' - b'') = 0$. Akibatnya $b' - b'' \in Ker g' \subseteq g'^{-1}(U') = Im f'$, sehingga terdapat $\bar{a} \in A'$ dengan $b' - b'' = f'(\bar{a})$. Karena $\beta f'(\bar{a}) = f\alpha(\bar{a})$, diperoleh $\beta(b' - b'') = f\alpha(\bar{a})$ yang berakibat $f(a - a') = f\alpha(\bar{a})$. Mengingat f monomorfisma, maka $a - a' = \alpha(\bar{a}) \in Im \alpha$. Akibatnya $a + Im \alpha = a' + Im \alpha$, yaitu ω terdefinisi dengan baik. Tinggal ditunjukkan keeksakan

$$\alpha^{-1}(W) \xrightarrow{f_*'} \beta^{-1}(V) \xrightarrow{g_*'} \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'} \xrightarrow{\omega} Coker \alpha$$

$$\xrightarrow{f_*'} Coker \beta \xrightarrow{g_*'} Coker \gamma$$

Langkah 1 : Akan ditunjukkan $Im f_*' = Ker g_*'$.

Ambil $b' \in Ker g_*'$. Berarti $g_*'(b') = 0 + U'$ sehingga diperoleh $g'(b') \in U'$. Akibatnya $b' \in g'^{-1}(U')$. Karena baris (I) eksak, terdapat $x \in A'$ sehingga $b' = f'(x)$. Karena $f_*' = f'|_{\alpha^{-1}(W)}$, tinggal ditunjukkan $x \in \alpha^{-1}(W)$. Perhatikan bahwa: $f\alpha(x) = \beta f'(x) = \beta(b')$. Karena $b' \in \beta^{-1}(V)$, maka $\beta(b') \in V$. Akibatnya $f\alpha(x) \in V$. Dilain pihak $f(W) = V$ dan f monomorfisma, maka $\alpha(x) \in W$ atau $x \in \alpha^{-1}(W)$. Akibatnya $Ker g_*' \subseteq Im f_*'$. Selanjutnya, ambil $a \in Im f_*'$ berarti terdapat $x \in \alpha^{-1}(W)$ sehingga $f_*(x) = a$ atau $f'|_{\alpha^{-1}(W)} = a$, $f'(x) = a$. Akibatnya $a \in Im f' = g'^{-1}(U')$, yaitu $g'(a) \in U'$. Sehingga $Im f_*' \subseteq Ker g_*'$, dengan kata lain $Im f_*' = Ker g_*'$.

Langkah 2 : $Im g_*' = Ker \omega$.

Ambil $x \in Im g_*'$ terdapat $b' \in \beta^{-1}(V)$ sehingga $g'(b') + U' = x$. Selanjutnya $\omega(x) = \omega(g'(b') + U') = f^{-1}\beta(g'^{-1}(g'(b')) + Im \alpha = f^{-1}\beta(b') + Im \alpha$. Karena $b' \in \beta^{-1}(V)$ maka $\beta(b') \in V$. Mengingat $f(W) = V$ dan f monomorfisma maka $f^{-1}\beta(b') \in W \subseteq Im \alpha$. Akibatnya $\omega(x) \in Im \alpha$ sehingga $x \in Ker \omega$. Jadi $Im g_*' \subseteq Ker \omega$. Ambil $y = c' + U' \in Ker \omega$ dengan $c' \in \gamma^{-1}(U)$ berarti $\omega(c' + U') = Im \alpha$ atau $f^{-1}\beta(g'^{-1}(c')) + Im \alpha \in Im \alpha$. Sehingga terdapat $x \in A'$ sedemikian hingga $\beta(g'^{-1}(c')) = f\alpha(x) = \beta f'(x)$.

Akibatnya $\beta(g'^{-1}(c') - f'(x)) = 0$ yaitu $g'^{-1}(c') - f'(x) \in Ker \beta \subseteq \beta^{-1}(V)$. Sehingga $g_*'(g'^{-1}(c') - f'(x)) = \pi g'(g'^{-1}(c') - f'(x)) = g'(g'^{-1}(c') - f'(x)) + U' = c' + U' = y$. Akibatnya $Ker \omega \subseteq Im g_*'$. Dengan demikian $Im g_*' = Ker \omega$.

Langkah 3 : $Im \omega = Ker f^*$.

Ambil $x \in Im \omega$ yaitu terdapat $c' + U' \in \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'}$ sehingga $\omega(c' + U') = x$. Perhatikan bahwa: $f^{-1}\beta(g'^{-1}(c')) + Im \alpha = x$, $f^*[f^{-1}\beta(g'^{-1}(c')) + Im \alpha] = f^*[x]$, $\beta(g'^{-1}(c')) + Im \beta = f^*(x)$. Sehingga $x \in Ker f^*$ atau $Im \omega \subseteq Ker f^*$. Selanjutnya misalkan $y = a + Im \alpha \in Ker f^*$ berarti $f^*(a + Im \alpha) = Im \beta$ atau $f(a) + Im \beta = Im \beta$, sehingga $f(a) \in Im \beta$. Akibatnya terdapat $b' \in B'$ sedemikian hingga $\beta(b') = f(a)$. Mengingat $g\beta = \gamma g'$ diperoleh $\gamma g'(b') \in U$. Akibatnya, $g'(b') \in \gamma^{-1}(U)$ sehingga $\omega(g'(b') + U') = f^{-1}\beta(b') + Im \alpha = a + Im \alpha = y$. Diperoleh $Ker f^* \subseteq Im \omega$ sehingga $Ker f^* = Im \omega$.

Langkah 4 : $Im f^* = Ker g^*$.

Misalkan $f^*(a + Im \alpha) \in Im f^*$, maka $g^*f^*(a + Im \alpha) = gf(a) + Im \gamma$. Karena $gf(a) \in U \subseteq Im \gamma$ maka $g^*f^*(a + Im \alpha) \in Im \gamma$. Akibatnya $f^*(a + Im \alpha) \in Ker g^*$, yaitu $Im f^* \subseteq Ker g^*$. Selanjutnya ambil $b + Im \beta \in Ker g^*$, berarti $g^*(b + Im \beta) = g(b) + Im \gamma \in Im \gamma$. Sehingga terdapat $c' \in C'$ sedemikian hingga $g(b) = \gamma(c')$. Karena g' epimorfisma, maka $g(b) = \gamma g'(b') = g\beta(b')$. Ini berakibat $g(b - \beta(b')) = 0$ atau $b - \beta(b') \in Ker g \subseteq g^{-1}(U) = Im f$. Sehingga terdapat $a \in A$ sedemikian hingga $b + Im \beta = f(a) + Im \beta = f^*(a + Im \alpha)$, yaitu $Ker g^* \subseteq Im f^*$. Dengan demikian $Im f^* = Ker g^*$.

Akibat 9. Misalkan

$$\begin{array}{ccccccc} & & f' & & g' & & \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

adalah diagram komutatif sedemikian hingga

- (1) Baris pertama adalah U' -eksak dan baris kedua adalah U -eksak.
(2) $U' \subseteq \gamma^{-1}(U)$ dan $U \subseteq \text{Im } \gamma$.

Maka barisan :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } \alpha & \xrightarrow{f'_*} & \text{Ker } \beta & \xrightarrow{g'_*} & \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'} & \xrightarrow{\omega} & \text{Coker } \alpha \\ & & & & \downarrow f'_* & & \\ & & & & \text{Coker } \beta & \xrightarrow{g'_*} & \text{Coker } \gamma \end{array}$$

eksak.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anderson, F.W. and Fuller, K.R., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, Inc. 1992.
[2] Davvaz, B. and Parnian-Garamaleky, Y.A., A Note On Exact Sequences, *Bull. Malaysian Math. Soc.* **22** (1999), No. 2, pp. 53–56.
[3] Davvaz, B. and Shabani-Solt, H., A Generalization Of Homological Algebra, *J. Korean Math. Soc.* **39** (2002), No. 6, pp. 881–898.
[4] Madanshekaf, A., Quasi-Exact Sequence and Finitely Presented Modules, *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, **Vol. 3** (2008), No. 2, pp. 49-53.
[5] Wisbauer, R., *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach : Philade, 1991.